מועד ב', סמסטר חורף תשפ"א - אלגברה 1/מ, 104016

10.3.21

חלק א'

פתרונות מלאים

ת"ז :

פקולטה :

- משך המבחן : 75 דקות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- **בשאלה 1 יש לנמק** היטב את התשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב.**
  בשאלות 6-2 יש לסמן את התשובה במודל
- **שאלת ש"ב היא שאלה 1-א' (הציון עליה מהווה 10% מגן)**

ב ה צ ל ח ה !

<u>שאלה מס' 1</u> : (20 נקודות)

הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית (**סעיף א' הוא שאלת ש"ב**) :

א. אם A מטריצה לא ריבועית, אז לפחות אחת מהמטריצות $A\cdot A^t$ או $A^t\cdot A$ לא הפיכה.

ב. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהיו U ו- W שני תת מרחבים לא טריוויאליים של V (כלומר שונים מ $\{0\}$ ושונים מ- V), **שאינם מוכלים זה בזה**. אז קיים ב- V תת מרחב $Z\neq\{0\}$ המקיים :
$Z\cap U=\{0\}$ וגם $Z\cap W=\{0\}$.

<u>פתרון שאלה מס' 1:</u>

א. הטענה נכונה. נתון כי המטריצה לא ריבועית ולכן נניח כי A מסדר $m\times n$ ו $m<n$. אז המטריצה A^tA היא מסדר $n\times n$. מאחר ומתקיים $r(A)=r(A^t)$ נקבל כי
$r(A^tA)\le\min\{r(A),r(A^t)\}=r(A)\le\min\{m,n\}=m<n$ כלומר A^tA היא מסדר $n\times n$ ומדרגה קטנה ממש מ- n ולכן לא הפיכה. אם היחס הוא הפוך אז מאותם שיקולים AA^t לא הפיכה.

ב. הטענה נכונה : מהנתון נובע שקיים $u\in U$ המקיים $u\neq 0$ כי $U\neq\{0\}$ וגם $u\notin W$ כי U לא מוכל ב- W, ומאותן סיבות קיים $w\in W$ המקיים $w\neq 0$ כי וגם $w\notin U$. נגדיר : $Z=sp\{u+w\}$ אז Z תת מרחב של V ממימיד 1 (נפרש ע"י וקטור אחד ששונה מ- 0 מהנתון על u ו- w) ובנוסף : $Z\cap U=\{0\}$
אחרת, אם החיתוך שונה מ- 0 נובע כי $Z\cap U=Z$ כי החיתוך מוכל ב Z, שמימדו 1, ולכן החיתוך הוא תת מרחב של Z מאותו מימד ולכן שווה לו.
מכאן כי $Z\subseteq U$ ולכן $u+w\in U$. U תת מרחב המכיל את u ולכן גם $-u\in U$ ולכן גם $-u+(u+w)=w\in U$ בסתירה לבחירת u. באותו אופן גם $Z\cap W=\{0\}$ כנדרש.

<u>שאלה מס' 2</u> : (6 נקודות)

יהי z מספר מרוכב המקיים $z^{10}=1$. נסמן $w=(1+i)^2 z^5$ אז בהכרח:

א. w ממשי ; ב. w מדומה טהור ; ג. $|w|=1$; ד. $\arg(w)=90^\circ$; ה. $\arg(w^2)=90^\circ$.

<u>פתרון שאלה מס' 2:</u>

מתקיים: $(1+i)^2=2i=2cis90^\circ$. הארגומנטים האפשריים של z^5 הם: $\left(\frac{360^\circ k}{10}\right)\cdot 5=180^\circ k$ לכן

הארגומנט של w הוא $180^\circ k+90^\circ$ כלומר 90° או 270° ולכן w מדומה טהור.

סימון נכון ב'.

<u>שאלה מס' 3</u> : (6 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{5\times5}$, ויהיו $u,v,w\in\mathbb{R}^5$. נסמן ב- W את מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\bar{x}=0$.

אזי:

א. אם $W=span\{u,v,w\}$, אז $rank(A)=2$.

ב. אם u,v,w מהווים 3 עמודות בלתי תלויות ליניארית של A, אז $\dim W=2$.

ג. אם $rank(A)=3$ ו $W=span\{u,v,w\}$, אז u,v,w בלתי תלויים ליניארית.

ד. אם $rank(A)=1$, אז $W\neq span\{u,v,w\}$.

ה. אם u,v,w מהווים 3 שורות בלתי תלויות ליניארית של A, אז $\dim W\geq 3$.

<u>פתרון שאלה מס' 3:</u>

נעבור על כל הטענות, ונזכור כי $dimW=n-r(A)=5-r(A)$:

א. **לא נכון כי:** אם $W=span\{u,v,w\}$ אז $dimW\leq 3$ ולכן $5-r(A)\leq 3$ כלומר: $r(A)\geq 2$

ב. **לא נכון כי:** אם ל- A יש 3 עמודות בת"ל (מתוך 5) אז $r(A)\geq 3$ (כי אולי יש ל- A עוד עמודות בת"ל) ולכן $dimW\leq 2$.

ג. **לא נכון כי:** אם הדרגה של A 3 אז המימד של W הוא 2. לכן אם $W=span\{u,v,w\}$, אז u,v,w פורשים את W לכן הם חייבים להיות תלויים ליניארית.

ד. **נכון כי:** אם הדרגה של A היא 1 אז מימד W הוא 4 אז לא יתכן שהוא נפרש ע"י 3 וקטורים בלבד.

ה. **לא נכון כי:** כמו ב- ב', $r(A)\geq 3$ (כי אולי יש ל- A עוד שורות בת"ל) ולכן $dimW\leq 2$.

סימון נכון: ד'.

<u>שאלה מס' 4</u> : (6 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. נתון כי $Y_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $Y_1=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ הם שני וקטורי פתרונות של המערכת האי הומוגנית $Ax=b$; אזי :

א. הווקטור $\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}$ הוא גם פתרון למערכת $Ax=b$.

ב. הפתרון הכללי של המערכת $Ax=b$ הוא $t\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ כאשר $t\in\mathbb{R}$.

ג. הווקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת $Ax=0$.

ד. הווקטור $\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת $Ax=b$.

ה. הווקטור $\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת $Ax=0$.

<u>פתרון שאלה מס' 4:</u>

נעבור על כל הטענות, ונזכור כי הפתרון הכללי למע' אי הומוגנית נתון ע"י פתרון כללי למע' ההומוגנית המתאימה ועוד פתרון פרטי של המערכת האי הומוגנית.

א. **לא נכון כי:** הוקטור הנתון הוא Y_1+Y_2 ולכן : $A(Y_1+Y_2)=AY_1+AY_2=b+b=2b\neq b$

ב. **לא נכון כי:** זה אומנם נראה כמו הפתרון הכללי למע' האי הומוגנית אבל לא נתון כי דרגת המטריצה היא 2 ולכן, אם הדרגה של המטריצה A היא 1 אז מימד מרחב הפתרונות הוא 2 ולכן הפתרון הכללי של ההומוגנית המתאימה מורכב מוקטור בסיס נוסף. לכן הנתון הוא חלק מהפתרון הכללי אבל לא בהכרח הפתרון הכללי.

ג. **נכון כי:** מהנתון $A(Y_1-Y_2)=AY_1-AY_2=b-b=0$ כלומר $Y_1-Y_2=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ הוא פתרון למע' ההומוגנית $A\bar{\bar{x}}=0$. אוסף הפתרונות הוא מ"ו ולכן סגור לכפל בסקלר כלומר גם $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת ההומוגנית.

ד. **לא נכון כי:** $A(2Y_2)=2AY_2=2b\neq b$.

ה. **לא נכון כי** : הנימוק מופיע בסעיף א'.

סימון נכון : ג'.

<u>שאלה מס' 5</u> : (6 נקודות)

תהי $A=\begin{pmatrix} 3 & a & 1 \\ b & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. נתון כי $\det(A)=24$ ו- $\lambda_1=2$ הוא ערך עצמי של A, אזי :

א. אם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אז $2a+b=7$.

ב. אם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אז $a+2b=5$.

ג. אם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אז $3a+2b=4$.

ד. אם $a\cdot b=4$ אז A לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

ה. אם $a\cdot b=2$ אז A לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

<u>פתרון שאלה מס' 5:</u>

נתון כי $\lambda_1=2$ הוא ערך עצמי של A . המטריצה היא מסדר 3 ולכן יש לה עוד 2 ערכים עצמיים λ_2,λ_3 מתקיים : $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det(A)=24$ וכן $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{trace}(A)=10$. נציב את הנתון $\lambda_1=2$ ונקבל כי $\lambda_2=2,\lambda_3=6$. לכן כדי שהמטריצה תהייה לכסינה נותר לדאוג לכך שריבוי גיאומטרי של 2 יהיה שווה ל- 2 (כי עבור ערך עצמי 6, ריבוי אלגברי שווה לריבוי גיאומטרי שווה 1). לכן נדרוש : $n-r(A-2I)=2$ כלומר נדרוש : $r(A-2I)=1$:

$$r(A-2I)=r\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=1 .$$

לקבלת דרגה 1 צריך שכל השורות יהיו כפולה של השורה האחרונה (שלא תלויה בפרמטר) ולכן בהכרח : $a=1\,,b=2$. מכאן כי רק ב' נכון.

נשים לב שסעיף ה' לא נכון כי $a\cdot b=2$ לא מחייב $a=1\,,b=2$ כנדרש.

סימון נכון : ב'.

<u>שאלה מס' 6</u> : (6 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית ויהי $B=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס סדור של $\mathbb{R}^3$.

נתון כי $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}T$ וכן נתון כי המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס B היא:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}a&0&b\\-3a&2a&1\\2c&b&a\end{pmatrix}\quad,\quad a,b,c\in\mathbb{R}$$

אזי $T\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ שווה ל:

א. $\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$; ב. $\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$; ג. $\begin{pmatrix}-2\\2\\10\end{pmatrix}$; ד. $\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$; ה. לא ניתן לקבוע על פי הנתונים.

<u>פתרון שאלה מס' 6:</u>

נשתמש במשפט: $[T]_B[v]_B=[T(v)]_B$. נתון $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}T$ לכן נמצא קוארדינטות שלו לפי B נכפול במטריצה

ונקבל 0: קל להבחין כי: $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ולכן $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ולכן:

$$[T]_B[v]_B=\begin{pmatrix}a&0&b\\-3a&2a&1\\2c&b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\-a-1\\2c+b-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a-b=0\\-a-1=0\\2c+b-a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-1\\a=-1\\c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}a&0&b\\-3a&2a&1\\2c&b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\3&-2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

רואים כי: $\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ולכן $\left[\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ מתקיים $\begin{pmatrix}-1&0&-1\\3&-2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}=\left[T\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}\right]_B$

לכן $T\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$

סימון נכון: ב'.